

# 内压和压缩位移下 U 形波纹管平面稳定性计算方法研究

李双印, 刘 岩

(洛阳双瑞特种装备有限公司, 河南 洛阳 471000)

**摘 要:**依据板条梁力学模型,通过初参数法建立了沿波纹管子午向不同位置  $\sigma_4$ 、 $\sigma_6$  应力计算式,结合 Mises 应力屈服准则,探讨了波纹管在内压和轴向压缩位移作用下的平面失稳工程计算方法。结合相关试验数据,得到了波纹管在内压和轴向压缩位移作用下的平面稳定性判据。试验表明,该计算方法和判据可满足工程应用需求,对波纹管的安全设计具有指导意义。

**关键词:**波纹管;平面失稳;判据

**中图分类号:**TB30 **文献标识码:**A

## Engineering Calculation Method and Criterion to the In-plane Instability of Non-reinforced U-shape Bellows under Combined Internal Pressure and Axial Compression Displacement

LI Shuangyin, LIU Yan

(Luoyang Sunrui Special Equipment Co. Ltd., Luoyang 471000, China)

**Abstract:** Engineering calculation method to the in-plane instability of non-reinforced U-shape bellows under combined internal pressure and axial compression displacement is established through calculating formulas for meridional bending stress  $\sigma_4$  and pressure  $\sigma_6$  at different positions of bellows based on beam mechanical model. The corresponding criterion of the bellow affected by internal pressure and axial compression displacement is also defined according to experimental data and calculation. The experimental data shows that the engineering calculation method and criterion are effective to engineering application and safety design of bellows.

**Keywords:** bellows; in-plane instability; criterion.

无加强 U 形波纹管的平面失稳是指一个或多个波纹平面发生移动或偏转,即波纹所在平面不再与波纹管轴线保持垂直,一个波或几个波纹发生倾斜或翘曲。平面失稳的发生会降低波纹管承压能力,补偿能力也会受到限制。

对内压  $p$  单独作用的工况,多个膨胀节标准中均给出波纹管平面失稳临界压力计算公式。而研究表明<sup>[1]</sup>,在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  共同作用下,波纹管的平面失稳临界压力会低于内压  $p$  单独作用的工况。诸多文献中对其失稳机理给出了相关解释,其中,文献[2]认为,波纹管在内

压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  共同作用下,发生平面失稳的机理与内压  $p$  单独作用时不同,在子午向弯曲应力和周向应力共同作用下,波谷处产生塑性铰线是平面失稳的开始,但平面失稳不一定会发生,随着此处塑性区域的扩展,平面失稳逐渐发生。进入塑性区部分的应力满足 Mises 屈服准则,即:

$$\sigma_{\text{mises}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_c^2 - \sigma_m \sigma_c} \geq 1.5\sigma_s \quad (1)$$

因平面失稳机理不同,采用现行膨胀节标准中波纹管平面失稳临界压力计算公式预测内压  $p$

收稿日期:2019-10-14

作者简介:李双印,1985 年生,男,高级工程师,主要从事金属结构力学分析工作。E-mail:li-shuangyin@163.com。

和轴向压缩位移  $X$  共同作用下的平面失稳临界压力存在安全风险。同时,当前对内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  共同作用工况的平面稳定性计算,基本是采用有限元分析的方法<sup>[2-5]</sup>,缺乏更便捷有效的工程计算方法。

本研究将波纹管等效为板条梁力学模型,推导波纹管不同位置 Mises 应力计算公式,结合平面失稳机理,得到内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  共同作用下无加强 U 形波纹管平面失稳计算方法。

## 1 内压和轴向压缩位移共同作用下影响平面稳定性的应力

在 1995 年,KOVES 给出平面失稳临界压力计算公式:

$$P_{cr} = \frac{Y}{K_2 \sqrt{\alpha}} \quad (2)$$

KOVES 认为,在内压  $p$  作用下,平面失稳临界压力  $P_{cr}$  与压力引起周向薄膜应力  $\sigma_2$  和压力

引起子午向弯曲应力  $\sigma_4$  有关。随后,EJMA 自第七版一直沿用此公式,后续修正仅对安全系数做出了调整<sup>[6]</sup>。

在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  作用下,除压力引起的周向薄膜应力  $\sigma_2$  和压力引起的子午向弯曲应力  $\sigma_4$  外,位移引起的子午向弯曲应力  $\sigma_6$  也将参与平面失稳。因此,在内压和轴向压缩位移共同作用下,与平面失稳临界压力  $P_{cr}$  密切相关的应力可表述为:

$$P_{cr} = f(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6) \quad (3)$$

## 2 $\sigma_4$ 和 $\sigma_6$ 在波高不同位置的计算公式推导

### 2.1 $\sigma_4$ 在波高不同位置的计算公式推导

#### 2.1.1 力学模型

波纹管按板条梁模型进行等效,两端固支,长度为  $h$ ,如图 1 所示。

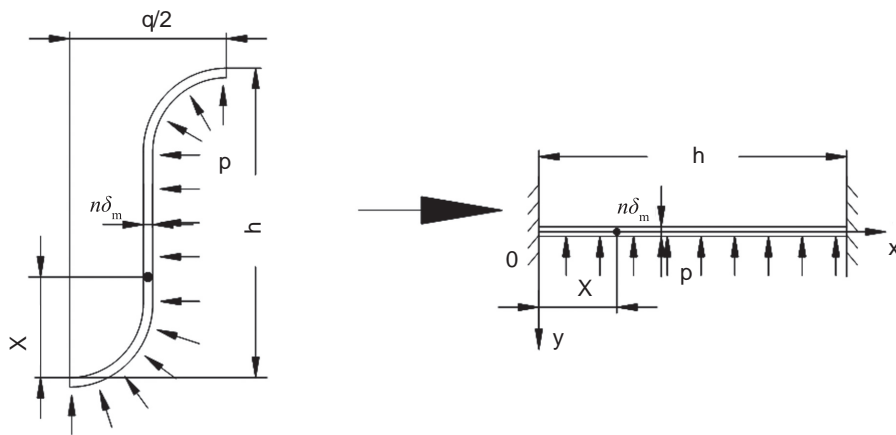


图 1 压力引起子午向弯曲应力

Fig.1 The mechanical model of meridional bending stress due to pressure

#### 2.1.2 计算公式推导

利用初参数法,得板条梁在压力  $p$  作用下的挠度  $v(x)$  计算公式:

$$v(x) = -\frac{ph^2}{24EI} \cdot X^2 \cdot \left(1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right) \quad (4)$$

由  $EIv''(x) = M(x)$  可得,弯矩在板条梁上的计算公式:

$$M(x) = \frac{1}{2}px(h-x) - \frac{ph^2}{12} \quad (5)$$

板条梁剖面模量:

$$W = \frac{n\delta_m^2}{6} \quad (6)$$

不同位置最大弯曲应力  $\sigma_4(x)$  (内表面) 为:

$$\sigma_4(x) = \frac{M(x)}{W} = \frac{p}{2n\delta_m^2} [6x(h-x) - h^2] \quad (7)$$

按 EJMA 中考虑模型修正系数  $C_p$ , 最终  $\sigma_4$  ( $x$ ) 表达式为:

$$\sigma_4(x) = \frac{M(x)}{W} C_p = \frac{p C_p}{2 n \delta_m^2} [6x(h-x) - h^2] \quad (8)$$

由式(5)可绘制自波谷至波高的弯矩分布曲线图,如图2所示,其中波谷、波峰处横截面的弯曲正应力  $\sigma_4(x)$  分布如图3所示。

## 2.2 $\sigma_6$ 在波高不同位置的计算公式推导

### 2.2.1 力学模型

波纹管按板条梁模型进行等效,两端固支,长度为  $h$ ,如图4所示。

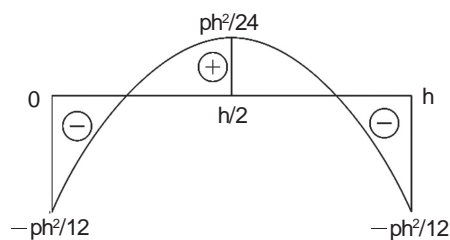


图2 内压  $p$  引起的沿波高各位置的弯矩分布图

Fig.2 The distribution of bending moment along the convolution height due to pressure

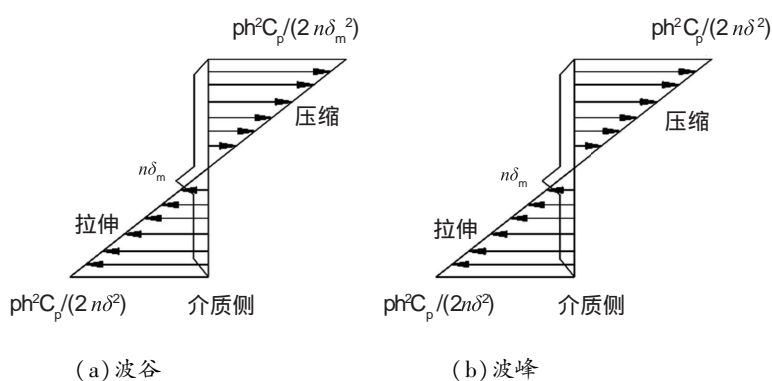


图3 波谷和波峰截面处弯曲正应力  $\sigma_4$  分布示意图

Fig.3 The distribution of meridional bending stress due to pressure at the crest and the root

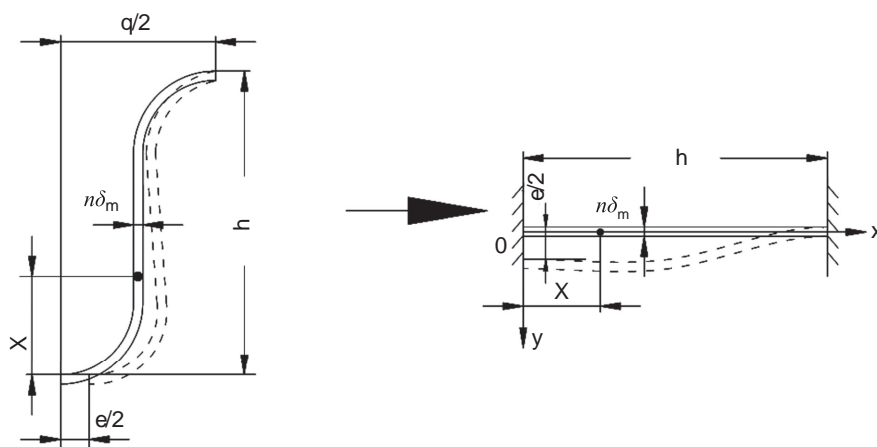


图4 位移引起子午向弯曲应力  $\sigma_6$  力学模型

Fig.4 The mechanical model of meridional bending stress due to deflection

### 2.2.2 计算公式推导

利用初参数法,板条梁在位移  $e/2$  作用下的挠度  $v(x)$  计算公式:

$$v(x) = \frac{e}{2} - \frac{3ex^2}{2h^2} + \frac{x^3}{h^2}e \quad (9)$$

由  $Elv''(x) = M(x)$  可得,弯矩在板条梁上的计算公式:

$$M(x) = \frac{3E I e}{h^2} \left( \frac{2x}{h} - 1 \right) \quad (10)$$

板条梁剖面惯性矩  $I$  为:

$$I = \frac{n\delta_m^3}{12} \quad (11)$$

结合公式(6),不同位置处最大弯曲应力  $\sigma_6(x)$  (内表面):

$$\sigma_6(x) = \frac{M(x)}{W} = \frac{3E\delta_m e}{2h^2} \left( \frac{2x}{h} - 1 \right) \quad (12)$$

按 EJMA 中考虑模型修正系数  $C_d$  及泊松比  $\mu$  的影响,最终  $\sigma_6(x)$  表达式为:

$$\sigma_6(x) = \frac{M(x)}{W C_d (1 - \mu^2)} = \frac{5E\delta_m e}{3h_2 c_d} \left( \frac{2x}{h} - 1 \right) \quad (13)$$

由式(10)绘制的自波谷至波高的弯矩分布曲线如图 5 所示,波谷、波峰处的弯曲正应力  $\sigma_6(x)$  分布如图 6 所示。

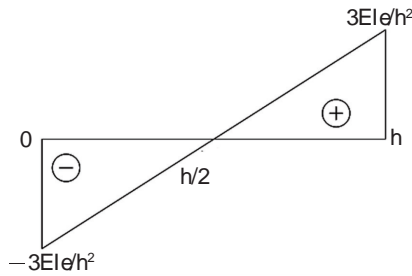


图 5 内压  $p$  引起的沿波高各位置的弯矩分布图

Fig.5 The distribution of bending moment along the convolution height due to deflection

### 3 $\sigma_4$ 和 $\sigma_6$ 沿子午向分布情况

由图 3、图 6 可知,在波谷位置,内压  $p$  引起的弯矩和压缩位移  $X$  引起的弯矩方向相同,产生的正应力相互叠加,在波峰位置弯矩方向相反,产生的正应力相互抵消,与文献[2]、[3]所述吻合。这也说明为何在内压和轴向压缩位移共同作用下,波谷形成塑性铰时,波峰位置不一定会形成塑性铰。 $\sigma_4$  和  $\sigma_6$  合成应力公式为:

$$\sigma_4 + \sigma_6 = \sigma_4(x) + \sigma_6(x) = \frac{P C_D}{2n\delta_m^2} [6x(h-x) - h^2] + \frac{5E\delta_m e}{ah^2 C_d} \left( \frac{2x}{h} - 1 \right) \quad (14)$$

根据式(8)、(13)和(14),沿波纹管子午方向波高不同位置  $\sigma_4$ 、 $\sigma_6$  和  $(\sigma_4 + \sigma_6)$  的应力分布示意图,如图 7 所示。

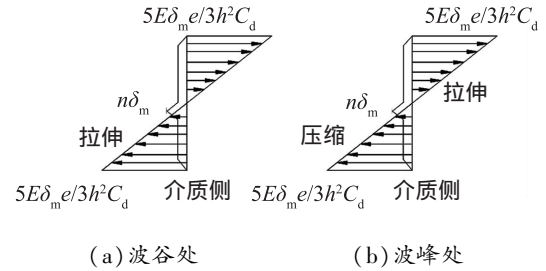


图 6 波谷和波峰截面处弯曲正应力  $\sigma_6$  分布示意图

Fig.6 The distribution of meridional bending stress due to pressure at the crest and the root

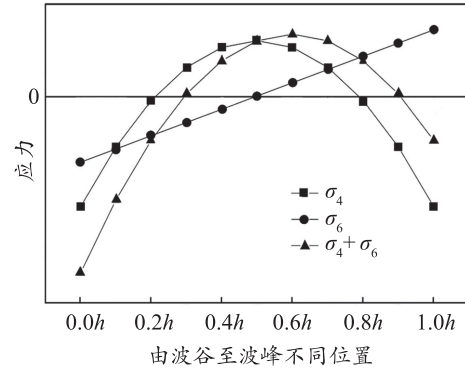


图 7 波谷至波峰子午向合成弯曲正应力变化趋势示意图

Fig.7 The change trend of normal meridional bending stress from the root to the crest

## 4 波纹管在 $\sigma_2$ 、 $\sigma_4$ 和 $\sigma_6$ 作用下的 Mises 应力

压力  $p$  引起的周向薄膜应力  $\sigma_2$  可按 GB/T 12777—2008<sup>[7]</sup> 规定公式计算,即:

$$\sigma_2 = \frac{K r p D_m}{2 A_{cu}} \quad (15)$$

结合式(1)、(14)和(15)可得,波纹管沿子午向不同位置的 Mises 应力计算式为:

$$\sigma_{\text{Mises}} = \sqrt{(\sigma_4 + \sigma_6)^2 + \sigma_2^2 - \sigma_2(\sigma_4 + \sigma_6)} \quad (16)$$

当  $\sigma_{\text{Mises}} \geq 1.5\sigma_s$  时,即认为此部分区域进入塑性阶段。

根据式(16)绘制的波纹管沿子午向不同位

置 Mises 应力变化示意图如图 8 所示。

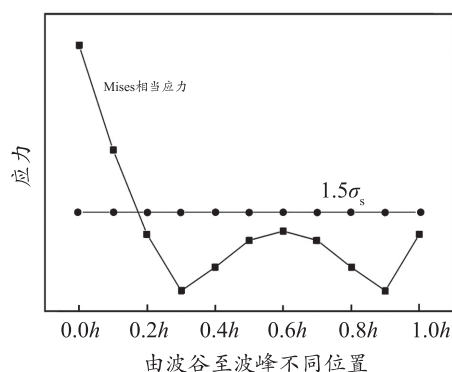


图 8 子午向不同位置 Mises 应力分布示意图

Fig.8 The distribution of Mises stress along the convolution height

由图 8 可知,在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  作用下,波谷处的应力水平明显高于其他区域的,波谷处区域将率先进入塑性区域的,形成塑性铰。

在波纹直壁中部区域和波峰位置将可能会形成第二、三高的应力区,有可能也会进入塑性区,视内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  大小而定。

## 5 波纹管在内压 $p$ 和轴向压缩位移 $X$ 作用下平面失稳判据

根据文献[2]中平面失稳机理,在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  作用下,只有当波纹管应力塑性区域扩展到一定范围后,平面失稳现象才会发生。本研究依托文献[2]、[8]、[9]、[10]中试验数据和公式(16)应力计算方法,计算当波纹管在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  联合作用下发生平面失稳时进入塑性区域的范围。进入塑性区域的范围以半波范围内进入塑性区域的波纹管展开长度表达。相关试验数据如表 1 所示。计算结果如表 2 所示。

表 1 波纹管试验数据<sup>1)</sup>

Table 1 The experimental data of bellows

型号	波根直径 $D_0/\text{mm}$	波高 $h/\text{mm}$	波距 $q/\text{mm}$	单层壁厚 $\delta/\text{mm}$	层数 $n$	波数 $N$	波纹管成 单波预压 形后的屈		平面失稳 试验压力 $p/\text{MPa}$
							缩位移 $e/\text{mm}$	服强度实 测值/ $\text{MPa}$	
RZ10-150B I	159	23	25	0.5	2	6	2.42	510	1.50
RZ16-250B II	273	33	37	0.8	3	7	3.5	487	2.40
DN250 1#	273	36	36	0.8	1	4	5.0	487	0.51
DN250 2#	273	36	36	0.8	1	4	3.0	487	0.75
RZ10-300B I	324	44	43	0.8	3	6	5.5	500	1.50
DN400	426	53	50	1.2	1	4	4.0	487	0.75
DN700 <sup>2)</sup>	700	36	54	1.0	1	7	5.7	487	0.30

注:1)上述试验件波纹管材料均为 300 系列奥氏体不锈钢,弹性模量  $E=195\,000\text{ MPa}$ ,泊松比  $\mu=0.3$ 。

2)DN700 波纹管成形后的屈服强度缺乏实测数据,按同类型材料实测数据,取 487 MPa。

由表 2 数据可知,上述试验件在波峰处均未形成塑性铰,仅在波谷处形成单塑性铰。发生平面失稳时, DN150~DN700 范围内波纹管的半波范围内塑性区域展开长度在 3.3~5.5 mm 范围内。基于上述结果,假定对于内压和轴向压缩位移作用下仅形成单塑性铰的波纹管,半波范围内塑性区展开长度超过 5 mm 时,波纹管将发生平面失稳。

结合上述试验件数据,利用式(16)、(17)计算波纹管平面失稳临界压力,与实测值进行比较,计算结果如表 3 所示。

由表 3 可知,基于上述假定的波纹管在内压和轴向压缩位移作用下平面失稳判据,波纹管平面稳定性预测误差在  $\pm 15\%$  以内,表明该假设具有工程应用价值。

表 2 波纹管半波范围内进入塑性区域的展开长度  
Table 2 Spread length of plastic region in half convolution

型号	波根直径 /mm	进入塑性区域位置	塑性区高度 $x$ /沿波高方向	塑性区展开长度/ mm
RZ10-150B I	159	波谷,单塑性铰	0.040	3.3
RZ16-250B II	273	波谷,单塑性铰	0.043	4.7
DN250 1#	273	波谷,单塑性铰	0.047	5.3
DN250 2#	273	波谷,单塑性铰	0.030	4.2
RZ10-300B I	324	波谷,单塑性铰	0.041	5.5
DN400	426	波谷,单塑性铰	0.020	4.8
DN700	700	波谷,单塑性铰	0.020	5.1

表 3 波纹管平面失稳临界压力计算值与试验值  
Table 3 Calculated value and test data of limiting internal pressure based on inplane

型号	波根直径 /mm	平面失稳临界压力 计算值 $p_1$ /MPa	平面失稳 压力实测值 $p$ /MPa	误差 $(p_1-p)/p$ /%
RZ10-150B I	159	1.52	1.50	1.30
RZ16-250B II	273	2.49	2.40	3.75
DN250 1#	273	0.48	0.51	-5.90
DN250 2#	273	0.86	0.75	14.7
RZ10-300B I	324	1.33	1.50	-11.3
DN400	426	0.79	0.75	5.30
DN700	700	0.29	0.30	0.30

6 平面失稳判据验证

为进一步验证上述判据的工程指导意义,选取 316L 材料 DN500 波纹管试验件进行预测,由

式(16)可知,波纹管应力状态与内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  均呈线性关系,采用轴向压缩位移或内压均可验证公式的可靠性,考虑到试验条件,选取轴向压缩位移为对比参数。相关实测值和计算结果如表 4 所示。

表 4 PL-DN500 波纹管平面失稳计算值与试验值比较  
Table 4 Comparison of calculated values and test data of inplane instability of PL-DN 500 bellow

波根直径 /mm	波高 $h$ /mm	波距 $q$ /mm	单层壁厚 $\delta$ /mm	层数 $n$	波数 $N$	试验压力 $p$ /MPa	平面失稳时 轴向压缩位移 $X$ /mm		(计算值-实测值) /实测值
							计算值	实测值	
517	50	60	2	1	4	1.6	26	30	-13.3%

试验数据和计算结果表明,在内压和轴向压缩位移作用下,波纹管平面稳定性计算方法和判

据可准确预测波纹管平面失稳工况,满足工程应用需求。

## 7 结 论

(1) 推导了波纹管在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  作用下波纹管平面稳定性计算方法, 为平面失稳预测奠定了基础。

(2) 提出了在内压  $p$  和轴向压缩位移  $X$  作用下的平面失稳判据, 即当波纹管仅形成单塑性铰时, 波谷处半波范围内塑性区域展开长度  $\geq 5\text{ mm}$ , 波纹管发生平面失稳。

### 参考文献:

- [1] 卢志明, 钱逸, 金忠根, 等. 波纹管在内压和位移作用下的平面失稳机理研究[J]. 管道技术与设备, 1999(6): 6-8.
- [2] 陈晔, 李永生, 顾伯勤, 等. U 形无加强波纹管平面失稳判据研究[J]. 压力容器, 2000, 17(6): 10-14.
- [3] 段玫, 陈友恒. 波纹管位移应力及其对安全应用的影响[C]. 第十四届全国膨胀节学术会议论文集, 2016: 97-103.
- [4] 陈晔, 李永生, 顾伯勤, 等. 用 ANSYS 软件对 U 形波纹管的有限元分析[J]. 压力容器, 1999, 17(3): 34-36.
- [5] 朱卫平. U 型波纹管及相关结构环向屈曲的有限元分析——波纹管平面失稳的机理[J]. 应用力学学报, 2003, 20(2): 152-154.
- [6] EJMA-1998, Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc. [S].
- [7] GB/T 12777-2008, 金属波纹管膨胀节通用技术条件[S].
- [8] 陈晔, 李永生, 顾伯勤, 等. U 形无加强波纹管平面失稳有限元分析[J]. 石油化工设备, 2001, 30: 35-37.
- [9] 缪春生, 赵建平, 孙涛, 等. 波纹管膨胀节型式试验中平面失稳试验方法的讨论[C]. 第六届全国压力容器学术会议压力容器先进技术精选集, 2005: 771-773.
- [10] 吴建伏, 陈立苏. 具有横向位移的无加强 U 型波纹管位移疲劳试验方法探讨[C]. 第十四届全国膨胀节学术会议论文集, 2016: 256-260.